

Lista 11 - Zastosowania całek podwójnych i potrójnych

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

(a)  $y = x^2, y = \frac{x^2}{4}, x = 2,$

(c)  $xy = 1, xy = 8, y = x^2, y = \frac{x^2}{8},$

(b)  $y = \sin x, y = \cos x, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4},$

(d)  $y^2 = 1 - x, y = 1 + x.$

2. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami

(a)  $x = 1, y = x, y = 5x, z = 0, z - x - 6y = 0,$

(c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 2x,$

(b)  $y = 1, z = 0, y = x^2, z = x^2 + y^2,$

3. Obliczyć pole płata danego równaniem

(a)  $z = 3x + 4y + 5, x \in [0, 1], y \in [0, 1],$

(c)  $z = \frac{1}{2}x^2, 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}, \frac{1}{2}x \leq y \leq 2x,$

(b)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x \in [1, 2], y \in [2, 3],$

(d)  $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 16.$

4. Obliczyć:

(a) masę,

(b) moment bezwładności względem osi Ox obszaru

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$$

o gęstości powierzchniowej masy  $\delta(x, y) = x.$

5. Wyznaczyć masę obszaru

$$U = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 16, 0 \leq z \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$$

o gęstości objętościowej  $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2.$